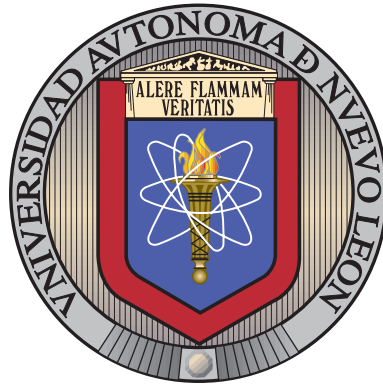


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ANÁLISIS Y OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL DE
REDES COMPLEJAS

POR

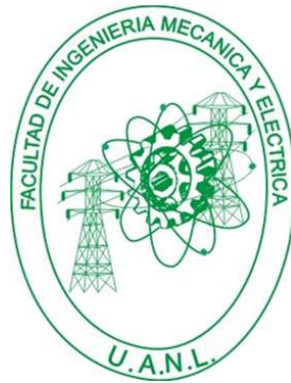
PERLA ELIZABETH CANTÚ CERDA

EN OPCIÓN AL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ANÁLISIS Y OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL DE
REDES COMPLEJAS

POR

PERLA ELIZABETH CANTÚ CERDA

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

ENERO 2009

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
División de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Análisis y optimización estructural de redes complejas», realizada por el alumno Perla Elizabeth Cantú Cerda, con número de matrícula 1052177, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

Satu Elisa Schaeffer

Asesor

Laura Cruz Reyes

Revisor

Roger Z. Ríos Mercado

Revisor

Vo. Bo.

Dr. Moisés Hinojosa Rivera

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, enero 2009

*Aquí puedes poner tu dedicatoria
si es que tienes una.*

*Si no tienes una, puedes borrar
la línea `\include{Dedicatoria}` en el
archivo `MiTesis.tex` pues no es obligatoria.*

ÍNDICE GENERAL

| | |
|---|-------------|
| Agradecimientos | VIII |
| Resumen | IX |
| 1. Estructura de la tesis | 1 |
| 2. Introducción | 3 |
| 2.1. Descripción del problema | 3 |
| 2.2. Antecedentes | 5 |
| 2.3. Objetivo | 6 |
| 2.4. Motivación y justificación | 6 |
| 2.5. Hipótesis | 8 |
| 3. Antecedentes | 9 |
| 3.1. Teoría de grafos | 9 |
| 3.2. Teoría de redes complejas | 11 |
| 3.2.1. Estructura topológica de redes complejas | 12 |
| 3.2.2. Propiedades estructurales | 13 |

| | |
|---|-----------|
| 3.2.3. Métricas ó medidas de calidad | 17 |
| 3.2.4. Modelos de redes complejas | 22 |
| 3.2.5. Modelos de generación de redes complejas | 25 |
| 3.3. Optimización | 26 |
| 3.3.1. Optimización multiobjetivo | 28 |
| 3.3.2. Optimización en redes complejas | 29 |
| 3.4. Algoritmos genéticos | 29 |
| 4. Metodología propuesta | 32 |
| 4.1. Funcionamiento del algoritmo genético | 33 |
| 4.2. Función objetivo | 36 |
| 4.3. Relación de propiedades y métricas | 37 |
| 4.4. Conjunto de soluciones | 39 |
| 4.5. Normalización de métricas | 39 |
| 5. Evaluación | 41 |
| 5.1. Diseño de experimentos | 41 |
| 5.2. Experimentos computacionales | 42 |
| 5.2.1. Funcionamiento del algoritmo genético | 43 |
| 5.3. Aplicaciones | 45 |
| 5.3.1. Caso practico I | 45 |
| 5.3.2. Descripción del problema | 45 |
| 5.3.3. Modelo y solución propuesta | 45 |

| | |
|--|-----------|
| 5.3.4. Resultados | 45 |
| 5.3.5. Conclusiones | 45 |
| 5.4. Caso practico II | 45 |
| 5.4.1. Descripción del problema | 45 |
| 5.4.2. Modelo y solución propuesta | 45 |
| 5.4.3. Resultados | 45 |
| 5.4.4. Conclusiones | 45 |
| 6. Conclusiones | 46 |
| 6.1. Trabajo futuro | 46 |
| A. Este es un apéndice | 50 |
| A.1. Citas bibliográficas | 50 |

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a los proyectos PAICYT CA1475-07 y PROMEP 103,5/07/2523 a través de los cuales se obtuvo financiamiento para copias, pósters, viajes y folletos. También se agradece a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME), por su apoyo para asistir al 6º Congreso Internacional sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico (CIINDET). Se agradece también a CONACyT por el otorgamiento de una beca de manutención durante los estudios de la maestría.

RESUMEN

Perla Elizabeth Cantú Cerda.

Candidato para el grado de Maestro en Ciencias
en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

ANÁLISIS Y OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL DE REDES COMPLEJAS

Número de páginas: 55.

OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO: Una de las principales razones del porque son tan populares las redes complejas es por su flexibilidad de poder representar de una manera abstracta la estructura topológica de un sistema.

En este trabajo de tesis se realiza un análisis a las propiedades estructurales de diversos sistemas o redes complejas. El objetivo del análisis es determinar la calidad de una red compleja y sugerir modificaciones en su estructura topológica para mejorar la calidad, eficiencia y/o tolerancia a fallas. Las modificaciones sugeridas se obtienen a través de una herramienta de software programada en lenguaje c, que se basa en la optimización multiobjetivo y los algoritmos genéticos para encontrar un

conjunto de estructuras topológicas diferentes a la original que aseguran un mejor rendimiento. Para evaluar la confiabilidad de los resultados se desarrolla un diseño de experimentos a través del cual se identifican los parámetros que influyen en el éxito de los resultados y también se estiman los parámetros iniciales con los cuales para cualquier tipo de red compleja se asegura una mejor calidad.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: La contribución de este trabajo es la creación de una herramienta de software de fácil uso que permite encontrar un conjunto de topologías diferentes a la de una red original que aseguran un mejor funcionamiento

L: evaluado en función de, tolerancia a fallas y eficiencia.

L: los resultados de la experimentación revelan que.. indicar la mejora en un porcentaje

Firma del asesor: _____

Satu Elisa Schaeffer

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

ESTRUCTURA DE LA TESIS

El presente trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se presenta la descripción general del problema, algunos antecedentes de redes complejas, el objetivo del presente trabajo, la motivación, justificación y la hipótesis bajo la cual se realizó el presente trabajo.

El Capítulo 2 contiene los antecedentes acerca de las diferentes áreas y conocimientos que se conjugan en el desarrollo del presente trabajo, éstas son: la teoría de grafos; la teoría de redes complejas como la estructura topológica de redes complejas, propiedades estructurales, métricas **L: métricas de que** y modelos de redes complejas; la optimización y algoritmos genéticos.

En el Capítulo 3 se describe de manera detallada la metodología propuesta con la cual se realizan modificaciones a la estructura topológica de una red compleja con el objetivo de mejorar su calidad.

En el Capítulo 4 se realiza la evaluación de la metodología propuesta y se realiza un diseño de experimentos para encontrar los parámetros que determinan o aseguran una mejora en la calidad de una red compleja. Posteriormente se muestran los resultados obtenidos con algunos experimentos computacionales.

En el Capítulo 5 se muestran las conclusiones obtenidas con el desarrollo del presente trabajo de investigación. Se muestran cuales son las principales aportaciones obtenidas con el trabajo desarrollado y se realizan sugerencias para un trabajo futuro.

Las referencias bibliográficas, lista de tablas, lista de figuras y los apéndices están disponibles al finalizar la sección de capítulos.

CAPÍTULO 2

INTRODUCCIÓN

Vivimos en un mundo de *sistemas*, de hecho somos parte de un sistema y estamos formado por sistemas. Un sistema se puede definir como la interacción de elementos para lograr un objetivo en común. Ejemplos de sistemas son la Internet, las neuronas de nuestro cerebro, circuitos electrónicos, redes de computadoras, redes de comunicaciones, redes de transporte y hasta el metabolismo de una célula. Estos sistemas y muchos otros más se pueden representar a través de grafos, ya que un *grafo* es una representación abstracta de situaciones formadas por elementos (*vértices*) y las interacciones entre ellos (*aristas*). Por ejemplo, si queremos representar la Internet como un *grafo* (un conjunto de vértices y aristas), entonces las computadoras sería representadas a través de vértices y el cableado entre las computadoras sería representado por aristas.

Existen una clase de sistemas denominados *redes complejas*, y son las redes complejas el tema principal de este trabajo. A continuación se describe cual es el problema que se aborda.

2.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

En Xu[?] se menciona que existen una gran cantidad de problemas en la ciencia, la ingeniería, la medicina, la tecnología y otras áreas donde el resolver ciertos problemas requiere un enorme tiempo de cómputo, y en la mayoría de las ocasiones se requiere una respuesta en un tiempo pequeño. Ejemplos de estos problemas son

el procesamiento de imágenes, el procesamiento de señales de un radar, el pronóstico del tiempo, el control rápido de reacciones químicas o nucleares y simulaciones aerodinámicas. Para resolver tales problemas es necesario tener un *sistema de múltiples procesadores (MPS)*, el cual sea rápidamente capaz de ejecutar algoritmos en paralelo. Sin embargo la rapidez de los procesadores está limitada por su mecanismo, por lo cual habrá que construir mejores supercomputadoras que logren incrementar la cantidad de procesamiento de información.

Por tanto, para construir tales supercomputadoras se necesita de diseñadores que construyan sistemas confiables, altamente efectivos, y que sean económicos. Para que tales sistemas sean económicos deben tener un buen diseño en la estructura de las interconexiones de sus componentes, es decir, deben tener una estructura topológica de calidad por no decir que óptima.

La estructura topológica de la interconexión de los componentes de una red juega el papel más importante en el diseño de los supersistemas, esto es porque cada interconexión entre los componentes esta asociado a un costo y a un determinado funcionamiento. Un alto rendimiento y un bajo costo son las principales metas en el desarrollo o diseño de cualquier red.

Los sistemas día con día necesitan actualizarse porque de lo contrario dejarían de ser útiles. El principal problema que se encuentra en el proceso de actualización es decidir si se renueva toda la red o solo algunos componentes.

En una red compleja (social, tecnológica o biológica) si llegase a ocurrir un ataque o falla en la red, por lo general no se conocería el impacto de la falla hasta que el sistema o la red dejase de funcionar y posiblemente afectara a otros sistemas. Esto se debe en medida a que no es fácil visualizar la conexión, ni la importancia de los elementos en una red compleja debido a la gran cantidad de elementos que la conforman.

Actualmente existen herramientas de software que analizan redes [**poner cuales**] complejas, pero de ninguna manera dan recomendaciones al tomador de decisiones

sobre cuales son las acciones que puede realizar, es decir, solo realizan un análisis y el tomador de decisiones interpreta los resultados. Aún y cuando es una buena ayuda para la interpretación de resultados, existen situaciones en las que se requieren respuestas precisas, como por ejemplo ¿Es óptimo el diseño de la red de telecomunicaciones una compañía? ¿Cómo se podría mejorar el desempeño o eficiencia de la red de telecomunicaciones?

El problema que se tiene es que actualmente no existe una herramienta de software que pueda responder éstas y otras preguntas enfocadas a a la *optimización* en la topología de una red compleja.

2.2 ANTECEDENTES

A finales de la década de los cincuentas y principios de la década de los sesentas, el estudio de la estructura de redes con conexiones aleatorias (*Teoría de grafos aleatorios*), fue un tema de gran interés para investigadores de diversas ciencias como las matemáticas, ciencias de la computación, comunicaciones, biología, sociología, economía y otras más. Desafortunadamente, en ese entonces no se contaba con redes complejas de gran tamaño, por lo cual no pudo ser comprobada en su totalidad la teoría que se había desarrollado.

Fue hasta los finales de los 90's que el estudio de la evolución y la estructura topológica de las redes llegó a ser un nuevo campo de estudio para la física. Estó se debió en medida al crecimiento impactante en la arquitectura de las redes de comunicaciones, la Internet y la World Wide Web (WWW) [13]. Es a partir de este crecimiento que se han desarrollado diferentes modelos de redes complejas, tales como las aleatorias, exponenciales, scale-free y small-world. En cada una de ellas se han encontrado un conjunto de características o propiedades estructurales que no se repiten de igual manera entre ellas.

La clasificación de redes complejas dentro de un modelo sirve para conocer y

entender el comportamiento de una red compleja, pero de ninguna manera otorga un análisis de la eficiencia ó calidad de la red. Por tanto, cuando se desea mejorar la calidad o funcionamiento de la red, no existe una guía, metodología o herramienta de software que indique por donde comenzar o que puntos modificar para asegurar el mejor funcionamiento en la red.

2.3 OBJETIVO

En este trabajo de tesis el objetivo es desarrollar una herramienta de software que determine la calidad de una red compleja para sugerir cambios en la topología de la red para obtener una red con mayor calidad (según la aplicación del grafo) y con el menor costo posible.

Además como objetivos secundarios se pretende garantizar que la herramienta de software funcione para cualquier tipo y aplicación de una red compleja, ya sea social, tecnológica ó biológica. Por último se busca encontrar y establecer los criterios o parámetros iniciales con los cuales la herramienta de software asegure encontrar un conjunto de topologías con mayor calidad que la red original.

2.4 MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN

En nuestra vida a cualquier sistema podemos visualizarlo como un grafo y por tanto, podemos observar fácilmente que elementos están relacionados así como también que elementos son los más importantes y qué pasaría si dejaran de existir algunos componentes [9]. Claro está que lo anterior es posible siempre y cuando el sistema sea de una magnitud pequeña, ya que si el sistema resulta ser del tipo de una red compleja, entonces se vuelve muy difícil el poder identificar algunos elementos y/o propiedades básicas.

El desarrollo de este trabajo fue motivado por la necesidad de mejorar sistemas con una gran cantidad de elementos, ya que solo habían sido desarrolladas

herramientas que visualizaban las conexiones entre los elementos, o bien, que solo analizaban datos de las redes, pero de ninguna manera otorgaban una mejoría en el funcionamiento de la red aún y cuando fuera una prioridad.

Un ejemplo de un sistema que necesita ser mejorado y/o optimizado es el drenaje pluvial del municipio de San Nicolás de los Garza en Nuevo León, donde podemos representar cada alcantarilla como un vértice y cada calle como una arista. En esta ciudad es muy conocido que a los pocos minutos de lluvia la ciudad se inunda. ¿Pero por qué sucede esto? La respuesta pudiera ser que las alcantarillas no están situadas en puntos estratégicos ni cuentan con la suficiente capacidad, teniendo como consecuencia que la ciudad se inunde con poca lluvia.

En este caso la red pluvial (siendo representada como un grafo) es frágil ante un *ataque* que en nuestro caso es la cantidad de lluvia, la cual mayor a la capacidad de la red. Una solución a esta situación podría ser colocar más alcantarillas en los lugares donde se cree que son los mejores, pero en realidad esta acción no soluciona el problema. La verdad es que sería una solución temporal y con el tiempo ineficiente debido al crecimiento de la población y la creación de nuevas viviendas. Por tanto la mejor solución es estudiar el problema y atacarlo de manera estratégica en el presente y a largo plazo a través de la teoría de grafos.

Otro claro ejemplo del porqué es importante estudiar la estructura topológica de redes se comprende cuando ocurren situaciones inesperadas como por ejemplo:

- ¿Qué pasaría si se aprovecha el grado de conexidad de un vértice en un red para hacer un ataque?
- Si existiera una epidemia, esta se podría propagar rápidamente en una red social y afectar a cientos de personas y por tanto, ¿Cómo se podría evitar la propagación de la infección a un mayor número de personas de manera rápida?
- ¿Se podría actuar a tiempo evitando costos elevados?

Todas estas situaciones se pueden manejar de una manera óptima si se conocen

las características y debilidades en la estructura del grafo. Es por esto que estudiar la estructura de un grafo y determinar su calidad es de vital importancia para resolver problemas tomando las mejores decisiones y con el menor costo.

En general existen muchos otros casos prácticos en los que con un estudio adecuado de la estructura y/o topología de un grafo se pueden evitar problemas como los ataques masivos, se puede actuar a tiempo en desastres naturales así como también responder a tales situaciones con el menor costo posible y lo más importante, el tener una asesoría sobre cuáles son las mejores decisiones que se pueden tomar según la estructura topológica que tenga un grafo.

2.5 HIPÓTESIS

Si se tiene una eficiente estructura en el diseño de una red, se obtiene una buena resistencia a ataques o intrusiones en la red y en un futuro no se requerirá de una considerable inversión para mantener la red o el grafo en un buen estado, pero se desconoce que factores son los mínimos necesarios para asegurar la calidad en cualquier grafo. Se cree que entre más conexo sea un grafo, se tendrá una mayor robustez [12] y por tanto se podría esperar una mejor calidad en el grafo. Pero:

- ¿Sólo la robustez nos asegura la calidad en un grafo?
- ¿Qué pasa con los costos a la hora de realizar mantenimientos en el grafo?, es decir, si los costos son mayores entre más conexo sea el grafo, entonces ¿Cómo podemos asegurar la calidad de un grafo sin costos excesivos?

Por lo anterior la hipótesis de este trabajo parte de la idea de que tener un grafo con un alto grado de conectividad no es sinónimo de una eficiente estructura y no asegura la calidad en la estructura de un grafo.

CAPÍTULO 3

ANTECEDENTES

Para poder ofrecer una red con una diferente estructura topológica y mayor calidad a la de una red original, se necesita estudiar las propiedades estructurales de la red y cuantificarlas a través de métricas; tales como el grado de percolación [8], el diámetro del grafo, la eficiencia, el grado de cada uno de los vértices, la vulnerabilidad, etc. Esto se puede lograr gracias al conocimiento existente sobre los diferentes modelos de redes complejas tales como los grafos aleatorios [15], los grafos scale-free [7], los grafos exponenciales [3] y los grafos del tipo small-world [24].

Pero estos antecedentes no bastan para lograr el objetivo del presente trabajo, ya que se deben tener conocimientos de otras áreas tales como la teoría de grafos, la teoría de redes complejas, la optimización, algoritmos genéticos y diseños de experimentos. Es por esto, que en este capítulo se presentan los antecedentes de las redes complejas y la información teórica de las diferentes áreas que se utilizaron en la metodología propuesta en este trabajo.

3.1 TEORÍA DE GRAFOS

Un **grafo** G es un par de conjuntos (V, E) , donde V es un conjunto finito de puntos $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ llamados vértices o nodos y E es un conjunto finito de aristas (i, j) , en donde cada arista une pares ordenados de vértices. A cada arista se le puede asignar un costo, peso o ponderación por conectar un par de vértices i, j y es denominada como la *distancia física*, $l_{i,j}$. Por lo general n determina la cardinalidad

de los vértices del grafo y m determina la cardinalidad de aristas.

Una grafo G es llamado *grafo completo* si cada par de vértices está conectado por una arista. Si existe una arista que conecte a dos vértices se dice que los vértices son *adyacentes*. El número de aristas adyacentes a un vértice i determina el *grado* de ese vértice, y a los vértices adyacentes a i se le conoce como el *vecindario* o *vecinos* de i .

En un grafo si las aristas tienen dirección del vértice i (punto inicial) al vértice j (punto final), entonces se dice que es un *grafo dirigido*. Si no existe dirección en las aristas de un grafo entonces se dice que es un **grafo no dirigido**. Una sucesión

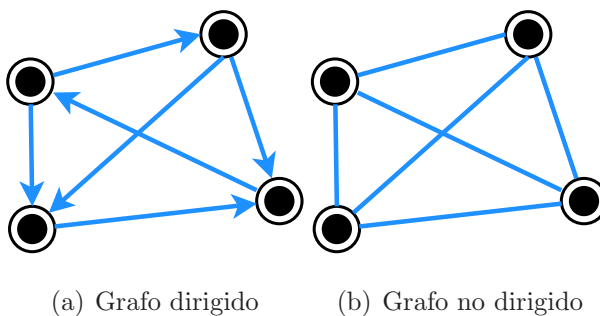


Figura 3.1: Tipos de grafos completos.

de aristas adyacentes que comienzan en un vértice i y terminan en un vértice j , es un *camino* de i a j , (i, j) . Un grafo G se dice ser *conexo* si existe un camino entre cualesquiera dos vértices. Si dos vértices i y j no son adyacentes, pueden estar conectados por una secuencia de aristas, y al conjunto de aristas que forman la secuencia se le denomina la *ruta* de i a j , siendo el número de aristas del camino la *longitud de la ruta*.

A la ruta entre los vértices i y j con la mínima longitud posible, se le conoce como la *ruta más corta*, la cual se puede obtener mediante su matriz de adyacencia.

La **matriz de adyacencia** (A), es una matriz cuadrada de orden $n \times n$, en donde se representa la presencia o ausencia de aristas entre un par de vértices. Si existe una arista entre los vértices i y j entonces $A(i, j) = 1$, en caso contrario $A(i, j) = 0$ [17]. La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido es simétrica:

$$A(i, j) = A(j, i).$$

El número de vértices en el conjunto V_G del grafo es denominado *orden de un grafo* $n = |V_G|$ y al número total de aristas en el conjunto E_G se le denomina *tamaño del grafo* $m = |E_G|$. El tamaño de un grafo puede ser como mínimo 0 y como máximo $n(n - 1)/2$.

3.2 TEORÍA DE REDES COMPLEJAS

Las redes complejas se caracterizan por tener un gran número de elementos y una complejidad en la interacción entre sus elementos que se debe principalmente a su estructura topológica (ó topología) no trivial [4]. Algunos ejemplos de redes complejas son [6]:

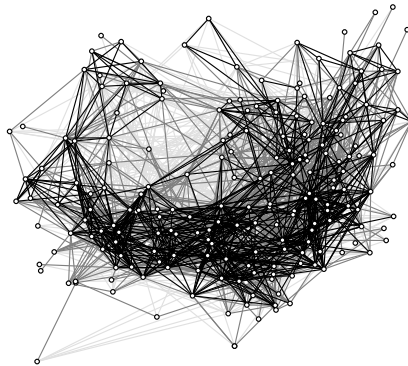


Figura 3.2: Red neuronal del gusano *Caenorhabditis elegans* modelado como una red compleja [23].

Todas estas redes complejas y otras más se pueden modelar a través de un grafo, en donde los componentes de las redes complejas se representan a través de vértices y las conexiones entre ellos a través de aristas. En la teoría de redes complejas existen más conceptos que deben comprenderse para facilitar el entendimiento de este trabajo. Tales conceptos se muestran a continuación.

Tabla 3.1: Ejemplos de redes complejas

PONER IMAGEN BONITA

Red de la World Wide Web.

Red de la Internet.

Redes biológicas.

Redes neuronales.

Redes de proteínas.

Redes de reacciones metabólicas de células.

Redes de telecomunicaciones.

Redes de emails.

Redes eléctricas.

Redes de energía

Circuitos electrónicos.

Redes de terroristas.

Red de drenaje pluvial.

Red de carreteras.

Red de llamadas telefónicas.

Redes sociales.

3.2.1 ESTRUCTURA TOPOLÓGICA DE REDES COMPLEJAS

Es bien conocido que la estructura topológica de una red es un grafo [25]. Y se puede creer que la *estructura topológica* de una red o *topología* de una red consiste en la figura que forman los vértices y aristas, pero en realidad la topología de una red en la teoría de grafos consiste en el *patrón* que forman los vértices y aristas [18].

En la figura 3.3 se muestran tres grafos con diferente forma, pero con el mismo patrón topológico, es decir, con el mismo patrón de conexión. A este tipo de grafos se les denomina *grafos isomorfos*.

Así existen varias redes complejas que comparten el mismo patrón topológi-

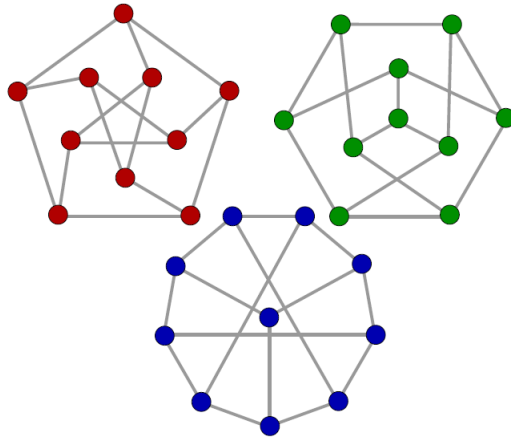


Figura 3.3: Grafos Isomorfos.

co,pero cada una de ellas presentan propiedades estructurales específicas, las cuales caracterizan su conexidad y la alta influencia que tienen en los procesos dinámicos de la red, Costa *et al.* [11]. Por lo tanto, dependiendo de la aplicación del grafo, es decir, del objetivo que se desee lograr, el conjunto de las propiedades mínimas requeridas para lograr la calidad en un grafo siempre es diferente. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos redes complejas con la misma estructura topológica, la primera es una red de telecomunicaciones y la otra una red social. En la red de telecomunicaciones se desearía que los mensajes enviados lleguen al mayor número de personas, pero en una red social si una persona se enfermará con un virus mortal se desearía que esta enfermedad no llegara a un mayor número de personas. Por lo cual mientras en una red se desearía maximizar la difusion de un mensaje en la otra con la misma topología se desearía minimizar la difusión de una enfermedad, aún y cuando tienen la misma topología.

3.2.2 PROPIEDADES ESTRUCTURALES

Algunas de las características o propiedades que son relevantes en la estructura topológica de un grafo son:

Asortatividad ó Mezclado \tilde{Q} . Existen redes en las cuales los vértices no son del

mismo tipo. Un ejemplo son las redes sociales, en donde las personas son consideradas como los vértices y la relación que existe entre ellas, es decir la amistad, es una arista. En este tipo de relaciones podría surgir la pregunta sobre cual es la probabilidad de que dos personas de diferente clase social sean amigos, y para responder existen ciertas propiedades que se deben tomar en cuenta, tal como lo es la *asortatividad*, que es la tendencia de que vértices de un tipo s tengan conexiones con vértices del mismo tipo s [11].

Así se define el *coeficiente de asortatividad* como,

$$\tilde{Q} = \frac{\sum_s P^{(\text{tipo})}(s|s-1)}{N_T - 1}, \quad (3.1)$$

donde N_T es el número de los diferentes tipos de vértices en la red.

Por otra parte la probabilidad de que un vértice del tipo s tenga un vecino del tipo t es,

$$P^{(\text{tipo})}(t|s) = \frac{\hat{e}_{st}}{\sum_u \hat{e}_{su}}, \quad (3.2)$$

donde \hat{e}_{st} es el número de aristas que conectan vértices del tipo s a vértices del tipo t . Cabe recordar que $\sum_t P^{(\text{tipo})}(t|s) = 1$.

Conexidad. En un grafo si existe un camino de un vértice i a cualesquiera otro vértice j del grafo, se dice que el grafo es conexo.

Entropía de la distribución del grado, H . Entropía es un concepto de termodinámica, mecánica estadística y teoría de la información que esta relacionada con la cantidad de desorden e información en un sistema [11]. En la teoría de la información, entropía describe que tanta aleatoriedad esta presente en eventos que se suponen son aleatorios.

Entropía de la distribución del grado provee una medida promedio de la heterogeneidad de la red, la cual puede ser definida como,

$$H = - \sum_k P(k) \log P(k). \quad (3.3)$$

La entropía de redes ha sido relacionada a la robustez de una red, es decir, a la resistencia a ataques; y la en la contribución de vértices a la red, entropía es relacionada con la mortalidad en redes de interacciones de proteínas.

Grado de correlación. Un caso especial de la *asortatividad ó mezclado* para una propiedad del vértice escalar es el mezclado de acuerdo al grado del vértice, conocido más comunmente como el *grado de correlación* [19]. ¿Qué hace que los vértices de un grado alto se conecten con otros de grado alto?, ¿Será acaso que prefieren conectar con vértices de un bajo grado?. Ambas situaciones ocurren en las redes del mundo real. Estudiar la *assortatividad* por grado es de gran interés porque puede dar lugar a efectos interesantes en la estructura de las redes. Una forma de obtener el grado de correlación es a través del *Coefficiente de correlación de Pearson*.

Grado de intermediación, $\sigma(m)$. En una red, cuantas más veces aparezca un vértice y/o arista en una ruta, se considera que esos vértices y/o aristas son los elementos más importante en la red. La *intermediación* de un vértice n es el número total de rutas más cortas entre todos los posibles pares de vértices que pasan a través del vértice n . Si el número de rutas más cortas entre un par de vértices es mayor a uno, entonces la ruta que pasa a través del vértice n contribuye a la intermediación con un correspondiente peso reducido.

Si el número total de las rutas más cortas entre los vértices i y j es $B(i, j)$ $\neq 0$, y $B(i, m, j)$ de ellos pasan a través de un vértice m , entonces el radio $B(i, m, j)/B(i, j)$ muestra que tan importante es el vértice m en la conexión entre los vértices i y j . Si, por ejemplo, ninguna de las $B(i, j)$ rutas más cortas pasa a través del vértice m , entonces la importancia del vértice m para i y j es cero. En cambio, si todas las $B(i, j)$ rutas pasan a través de m , entonces la importancia de m es muy grande ya que el vértice m controla las conexiones de las rutas más cortas. Así la *intermediación* de un vértice m es:

$$\sigma(m) \equiv \sum_{i \neq j} \frac{B(i, m, j)}{B(i, j)}, \quad (3.4)$$

donde la suma es sobre todos los pares de vértices para los cuales existe al menos una ruta, esto es, con $B(i, j) \neq 0$. Los vértices con un alto grado de intermediación controlan a la red. Por tanto, es natural sugerir que la intermediación de un vértice está estrechamente correlacionada con el grado del vértice.

El grado de intermediación nos sirve para cuantificar la importancia de un vértice en el tráfico de la red y por tanto puede servir como un indicador de la resistencia de la red al remover un vértice ya que nos dice que tan eficiente es una ruta cuando se elimine el vértice i . El grado de intermediación también nos sirve para identificar cuellos de botella.

Grado de un vértice, k . El grado de un vértice indica la cardinalidad de aristas que son incidentes a un vértice i . Es una característica muy importante porque a través de ella se pueden derivar muchas métricas de la red.

Percolación, *GCC*. La distribución del grado, el coeficiente de agrupamiento y el grado de intermediación, no son las suficientes propiedades para tener un conocimiento global de la estructura topológica de una red. Para tener un conocimiento real de la red, Dorogovtsev y Mendes [11] mencionan que se debe conocer las propiedades de percolación de la red. El coeficiente de percolación es conocido como el componente gigante, *GCC* por sus siglas en inglés.

Robustez o Resistencia de la red. Es un concepto que involucra el patrón de descomposición que se forma al eliminar un vértice o arista del grafo [21]. Ésta propiedad también es identificada como la resistencia a fallas, la cual obviamente es muy importante en redes biológicas y de comunicaciones.

Vulnerabilidad de un vértice, V_i . En la estructura topológica de una red, es importante conocer cuales son los componentes ó vértices más importantes para el mejor funcionamiento de la red. Intuitivamente los vértices críticos de la red son los *hubs* (vértices con un alto grado), sin embargo, hay situaciones en las cuales los hubs no son necesariamente los de mayor importancia para el

funcionamiento de la red. Por ejemplo, en un árbol binario todos los vértices tienen el mismo grado, por lo tanto en el árbol binario no existen hubs, pero si desconectan los vértices mas cercanos a la raíz o mejor aún si se elimina la raíz, entonces se tiene un mayor impacto o falla en la red. Por lo tanto, tener la propiedad de jerarquía en la estructura topológica de una red significa que los componentes más importantes son aquellos que ocupan las posiciones mas altas en la jerarquía.

Entonces una manera de encontrar los componentes o vértices más críticos en la red es buscando los vértices más vulnerables. Si asociamos el funcionamiento de una red con su eficiencia global, la *vulnerabilidad de un vértice* podemos definirlo como la caída del desempeño cuando el vértice y todas sus aristas son eliminadas de la red.

$$V_i = \frac{\mathcal{E}_{\text{glob}} - \mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_{\text{glob}}}, \quad (3.5)$$

donde E_{glob} es la eficiencia global de la red original y E_i es la eficiencia global despues de remover el vértice i y todas sus aristas.

Una forma de medir la *vulnerabilidad de la red* es obteniendo la máxima vulnerabilidad para todos sus vértices:

$$V(G) = \text{máx } V_i. \quad (3.6)$$

3.2.3 MÉTRICAS Ó MEDIDAS DE CALIDAD

El objetivo de utilizar métricas o *medidas de calidad* es para cuantificar las propiedades estructurales de un grafo. Algunas de estas medidas son [11]:

Coeficiente de agrupamiento, C . Una propiedad muy común que se encuentra en las redes sociales, es que si un vértice A está conectado a un vértice B y éste vértice se conecta a un vértice C , entonces es muy probable que el vértice A también este conectado al vértice C . Por ejemplo, es muy probable que el amigo de tu amigo también sea tu amigo. Lo anterior es una tendencia de

transitividad o agrupamiento la cual es cuantificada a través del coeficiente de agrupamiento, el cual es un concepto también conocido como *fracción de transiciones triples* en Albert y Barabási [2] ó *la densidad de la red* en Newman [19] en el cual el coeficiente de agrupamiento caracteriza la densidad de las conexiones cercanas a un vértice. En términos de la topología de una red, significa la presencia creciente de un número de triángulos en la red (conjuntos de tres vértices en donde cada uno de ellos está conectado a cada vértice) [19]. Se dice que el coeficiente de agrupamiento muestra *la densidad* de pequeños *lazos* ó *loops* de orden tres en la red [13], por lo cual la noción de agrupamiento está directamente relacionada a *lazos* (el coeficiente de agrupamiento de un árbol es cero por definición).

Dorogovtsev y Mendes [13], definen el coeficiente de agrupamiento de un vértice como el radio entre el número total de aristas E_i que conectan a los vecinos más cercanos, y el número total de todas las aristas posibles $k_i(k_i - 1)/2$ entre todos los vecinos más cercanos,

$$C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (3.7)$$

Veamos un ejemplo, en el siguiente grafo el vértice i tiene cuatro vecinos más cercanos, dos aristas actualmente conectan los vecinos más cercanos y seis aristas es el número máximo de aristas que conectarían a todos los vecinos más cercanos. Por lo tanto el coeficiente de agrupamiento para este grafo es igual a $2/6 = 1/3$.

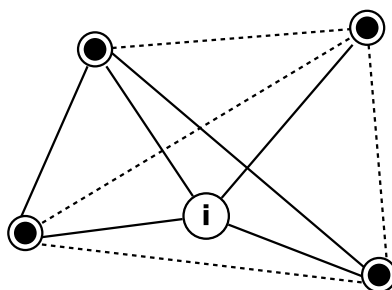


Figura 3.4: Ilustración de la definición del coeficiente de agrupamiento.

El coeficiente de agrupamiento de todo el grafo $C(G)$, es el promedio del coe-

ficiente de agrupamiento de cada vértice $i \in V$,

$$C(G) = \frac{\sum_{i \in V} C_i}{n}. \quad (3.8)$$

El agrupamiento, o la presencia de lazos, es una forma específica de correlaciones en una red.

Si el coeficiente de agrupamiento de una red infinita no se acerca a cero, entonces existen correlaciones entre los vértices de la red. El coeficiente de agrupamiento de un grafo completo es igual a uno.

Longitud de la ruta más corta característica, $L(G)$. La *ruta más corta* entre (i, j) se caracteriza por tener la mínima longitud posible y a esta longitud se le conoce como *distancia geodésica*, d_{ij} . Así la $L(G)$ se define como el promedio de las distancias geodésicas.

$$L(G) = \frac{\sum_{i > j \in V} d_{ij}}{\frac{1}{2}n(n-1)} \equiv \frac{\sum_{i \neq j \in V} d_{ij}}{n(n-1)} \quad (3.9)$$

Diámetro de la red, $D(G)$. Es la longitud más grande de las *distancias geodésicas*.

$$D(G) = \max_{i \neq j \in V} d_{ij} \quad (3.10)$$

El diámetro de la red es con frecuencia una métrica de la eficiencia, y es un importante parámetro para medir el funcionamiento de la estructura topológica de la red, ya que es una buena medida para cuantificar el retardo de la transmisión de un mensaje a través de una red. Por ejemplo, si se desea mejorar o incrementar la eficiencia de la transmisión de un mensaje, entonces se debe minimizar el diámetro de un grafo. Conocer el diámetro de una red sirve para conocer el funcionamiento de la red en el peor de los casos [25].

Distancia promedio, DP . El valor promedio de todas las distancias entre pares de vértices puede ser una métrica más precisa sobre el funcionamiento promedio de una red que el diámetro [25]. El promedio o la distancia media de un grafo

G es definido como,

$$DP(G) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j \in V} d_{ij}, \quad (3.11)$$

donde $DP(G)$ es el promedio aritmético de todas las distancias diferentes a cero.

Distribución del grado, $P(k)$. Indica la probabilidad de que un vértice i en el grafo de tamaño N tenga k conexiones con otros vértices (k vecinos más cercanos) y podemos denotarlo como $P(k, i, N)$.

Si se conoce la distribución del grado de cada vértice en la red, entonces se puede obtener la *distribución del grado total*,

$$P(k, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p(k, i, N) \quad (3.12)$$

La distribución del grado de un vértice caracteriza solo propiedades locales de una red, pero con frecuencia esta poca información sobre la estructura de una red es suficiente para determinar sus propiedades básicas, Dorogovtsev y Mendes [13].

Eficiencia de la red, \mathcal{E} . Sirve para medir que tan eficiente es el intercambio de información en una red [17]. La eficiencia \mathcal{E}_{ij} de la comunicación entre dos vértices i y j es definida como el inverso proporcional a la ruta más corta,

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}, \forall i, j \in V \quad (3.13)$$

Cuando en el grafo no existe un camino entre los vértices i y j , entonces la distancia entre esos vértices se considera como infinita y por tanto la eficiencia es igual a cero.

La *eficiencia promedio de un grafo* $\mathcal{E}(G)$, es definida como,

$$\mathcal{E}(G) = \frac{\sum_{i \neq j \in G} \mathcal{E}_{ij}}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j \in G} \frac{1}{d_{ij}}, \quad (3.14)$$

en donde $n(n-1)$ son todas las posibles aristas de la red.

La eficiencia promedio del grafo se puede tomar como la *eficiencia global del grafo*, $\mathcal{E}_{\text{glob}}$. La \mathcal{E} se normaliza con respecto al grafo completo G_n en el cual la información se propaga de la manera más eficiente $dist_{ij} = l_{ij} \forall i, j \in V$ y la \mathcal{E} toma su máximo valor,

$$\mathcal{E}(G_n) = \frac{\sum_{i \neq j \in V} \mathcal{E}_{ij}}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j \in V} \frac{1}{l(i, j)}, \quad (3.15)$$

La *eficiencia local*, \mathcal{E}_{loc} , es un indicador de la vulnerabilidad o tolerancia a fallas de una red, y se puede definir como la eficiencia promedio de los subgrafos locales,

$$\mathcal{E}_{\text{loc}} = \frac{1}{N} \sum_{i \in G} \mathcal{E}(G_i), \quad (3.16)$$

en donde $\mathcal{E}(G_i)$ es la eficiencia de cada vértice.

La *eficiencia global*, $\mathcal{E}_{\text{glob}}$, sirve para cuantificar la eficiencia de la red a la hora de mandar información entre vértices de la red.

Índice de acoplamiento, μ_{ij} . Un índice de acoplamiento o en inglés *matching index* puede ser asignado a cada arista en una red para cuantificar la semejanza entre la conectividad de dos vértices adyacentes a una arista. Así un valor pequeño en el índice de acoplamiento identifica a una arista que conecta dos regiones diferentes en la red, por lo cual juega un papel importante al ser como un acceso directo entre regiones distantes en la red. El índice de acoplamiento de una arista (i, j) es obtenido computacionalmente como el número de acoplamiento de conexiones de vértices i y j (por ejemplo conexiones a un mismo vértice k), divididos por el número total de conexiones de ambos vértices (excluyendo las conexiones entre los vértices i y j),

$$\mu_{ij} = \frac{\sum_{k \neq i, j} a_{ik} a_{jk}}{\sum_{k \neq j} a_{ik} + \sum_{k \neq i} a_{jk}}. \quad (3.17)$$

El índice de acoplamiento también puede ser adaptado para considerar a todos los vecinos más cercanos de un vértice [11].

3.2.4 MODELOS DE REDES COMPLEJAS

Con el objetivo de estudiar las propiedades de las redes reales, varios modelos de redes complejas han sido propuestos en base a su distribución del grado. Algunos de estos modelos de redes han sido de mucho interés, por ejemplo el modelo small world de Watts y Strogatz [24] y las redes scale-free de Barabási-Albert [4]. A continuación se describe cada una de ellas y se mencionan sus principales propiedades.

Redes Aleatorias. Son aquellas en las cuales las conexiones de las aristas a los vértices se realizó de forma aleatoria, y por tanto la mayoría de los vértices tienen aproximadamente el mismo grado. Las redes aleatorias son consideradas como el modelo más básico de las redes complejas. En la Figura 3.5 se muestra la topología y la gráfica correspondiente a la distribución del grado de una red Aleatoria.

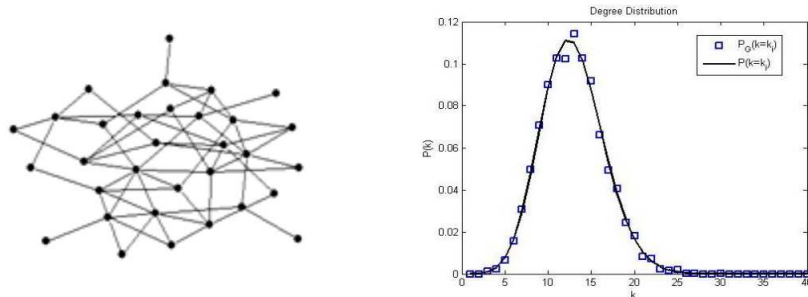


Figura 3.5: Estructura topológica y gráfica de la distribución del grado de una red Aleatoria [18].

Redes Exponenciales. Son redes no tolerantes a fallas ya que cada vértice tiene aproximadamente el mismo grado, por tanto no importa que vértice falle, ya que el daño será el mismo [3]. Ejemplos de redes Exponenciales son la red de energía del sur de California y la red de vías de ferrocarril de la India.

Las redes Exponenciales toman su nombre por su distribución del grado:

$$P(k) \sim e^{-k}, \quad (3.18)$$

la cual muestra un pico en k y después cae exponencialmente para valores grandes de k .

En la Figura 3.6 se muestra la topología y la gráfica correspondiente a la distribución del grado de una red Exponencial.

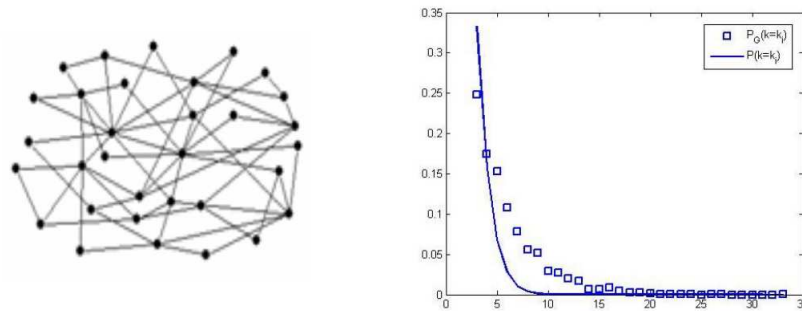


Figura 3.6: Estructura topológica y gráfica de la distribución del grado de una red Exponencial [18].

Redes Small-World. No son precisamente una clase de redes complejas, sino más bien una característica que implica que las redes complejas tengan un alto coeficiente de agrupamiento y una distancia pequeña entre sus vértices [24]. Ejemplos de redes del tipo "Small-World" son la red eléctrica de los Estados Unidos y las redes sociales. En este tipo de redes, las enfermedades se difunden mucho más rápido que en cualquier otro tipo de red debido a la poca distancia entre sus vértices.

En la Figura 3.7 se muestra la topología y la gráfica correspondiente a una red Small-World.

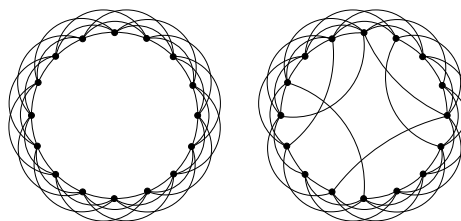


Figura 3.7: Con realizar cambios aleatorios en la conexión de las aristas, se obtiene una red con un mayor coeficiente de agrupamiento y una menor distancia.

Redes Scale-Free ó Power-Law. Son aquellas en las que independientemente del número de vértices, la distribución del grado no cambia. Estas redes se denominan así porque siguen una distribución del grado *Power Law*:

$$P(k) \sim k^{-\gamma}, \quad (3.19)$$

en donde el parámetro de control γ decrece desde ∞ hasta cero y describe que tan rápido decae la frecuencia de aparición del grado k , por tanto el grado promedio de la red se incrementa a medida que γ se decrementa.

La característica de estas redes, es que están formadas por unos cuantos vértices con un grado muy alto y el resto de los vértices tienen pocas conexiones entre ellos, es decir, tienen un grado pequeño. Esta característica permite que la tolerancia a fallas es grande siempre y cuando las fallas sean aleatorias, pero si las fallas son en vértices que tienen un grado muy alto (vértices centrales) entonces la red se vuelve vulnerable [3]. Ejemplos de redes complejas Scale Free son la World Wide Web, Internet, redes de proteínas, redes de metabolismo y las redes sociales.

En la Figura 3.8 se muestra la topología y la gráfica correspondiente a la distribución del grado de una red Scale Free.

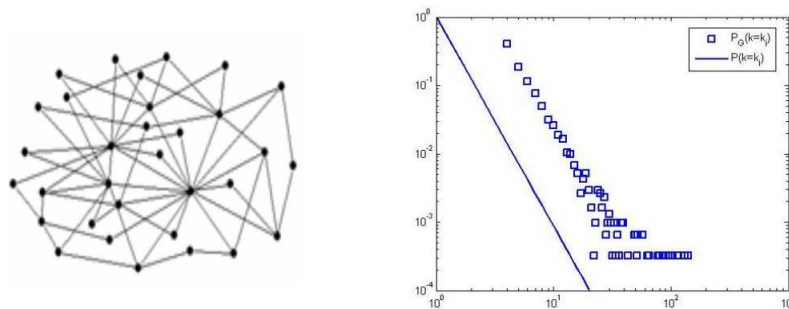


Figura 3.8: Estructura topológica y gráfica de la distribución del grado de una red Scale Free [18].

3.2.5 MODELOS DE GENERACIÓN DE REDES COMPLEJAS

Los modelos de generación de redes, son una herramienta importante que reproducen redes que comparten las características topológicas de las redes del mundo real. El estudio de estos modelos nace con la finalidad de analizar y comprender las funciones y fenómenos que se llevan a cabo en las redes complejas [18].

De entre los modelos existentes se distinguen dos tipos de modelos:

- **Modelos de generación sin crecimiento.** Estos modelos de caracterizan por dos aspectos importantes:

1. El número de vértices es fijo.
2. La agregación de aristas entre cualquier par de vértices se realiza con una probabilidad p .

Ejemplos de modelos de generación sin crecimiento son:

- $G_{n,p}$. Propuesto en 1959 por Gilbert [15], el cual consiste que a un grafo con n vértices se le incluya cada una de las posibles aristas del grafo $E = \binom{M}{2}$ con una probabilidad igual a p .
- $G_{n,m}$. Propuesto por Erdős y Rényi [14], el cual consiste que partiendo de un grafo con n vértices se le deben incluir con una probabilidad p , solo m aristas de todo el conjunto de posibles aristas.

- **Modelos de generación basados en crecimiento.** Estos tipos de modelos se caracterizan por los siguientes aspectos:

1. La construcción del grafo comienza con un número fijo de vértices y en cada paso se añaden x vértices.
2. La agregación de aristas entre cualquier par de vértices se realiza con una probabilidad p .

Ejemplos de modelos de generación basados en crecimiento son:

- *Ba.* El modelo Barabási-Albert fue introducido en 1999 y está basado en el crecimiento y el enlace preferencial, fue el primer modelo que reprodujo redes con una distribución del grado Power-Law. Este modelo considera dos elementos:
 1. *Crecimiento.* La construcción del grafo comienza con un número pequeño de vértices n_0 y a cada paso t se añade un nuevo vértice i con $m \leq m_0$ aristas que enlazan a i con m diferentes vértices ya existentes en el grafo.
 2. *Enlace preferencial.* Cuando se incluye un nuevo vértice i al grafo, se deben seleccionar los vértices que serán vecinos de i . Para elegir los vecinos del vértice i se asume que la probabilidad Π de que i sea conectado a un vértice ya existente j , depende del grado k_j del vértice j , tal que:

$$\Pi(k_j) = \frac{k_j}{\sum_{v \in V} k_v} \quad (3.20)$$

Después de t lapsos de tiempo, el procedimiento resulta en una red con $n = t + m_0$ vértices con mt aristas.

Para mas información el lector puede consultar [5].

3.3 OPTIMIZACIÓN

La **optimización** se refiere al estudio de problemas en donde se busca maximizar o minimizar una función real. Una gran cantidad de problemas teóricos y de la vida real pueden ser representados a través de un *modelo matemático* de optimización. Un **modelo matemático** es un conjunto de relaciones matemáticas que representan una abstracción de un sistema real y/o complejo.

Un problema general de optimización se encuentra formado por variables de decisión, una función objetivo y restricciones. Las *variables de decisión* son las variables para las cuales se desea encontrar los *mejores* valores, por ejemplo la cantidad

de producto a enviar desde el centro de producción i hasta el centro de consumo j (x_{ij}), la cantidad de insumos a adquirir en el periodo t (y_t) y el número de horas que se destinará a la máquina i para producir el artículo j en el período t (Z_{ij}).

La *función objetivo* especifica la relación de las variables de decisión y una cierta variable cuyo valor se dese minimizar o maximizar. Una función objetivo sirve como un criterio para especificar que una solución es mejor que otra. Algunos ejemplos de funciones objetivos vienen son aquellas que intentan la maximización de utilidades y/o la minimización de costos, en donde ambas funciones éstas deben ser escritas en función de las variables del problema.

Las *restricciones* sirven para especificar los valores límites que pueden tomar las variables de decisión, ya sean limitantes físicas, económicas, técnicas, etc. Un problema de optimización puede contener restricciones de igualdad y/o desigualdad. Las restricciones de igualdad frecuentemente describen la operación de un sistema, mientras que las restricciones de desigualdad definen límites dentro de los cuales ciertas variables pueden estar [20].

Un modelo general de optimización se puede describir de la siguiente manera:

$$PL = \text{mín } f(x) \quad (3.21)$$

sujeto a:

$$g(x) \leq 0 \quad h(x) = 0 \quad (3.22)$$

$$x \in X \subseteq \mathbb{R} \quad (3.23)$$

Cuando las funciones f , g , y h son *lineales*, el modelo general es un problema de *programación lineal*(PL), de lo contrario, se considera un problema de programación no lineal.

Así programación lineal estudia la optimización de una función objetivo lineal sujeta a un conjunto determinado de restricciones lineales de igualdad o desigualdad.

Existen algunos problemas de optimización para los cuales los valores de las

variables deben ser estrictamente enteras. A estos problemas se les conoce como *problemas de programación lineal entera*. Existen algunos otros problemas de optimización que necesitan ser modelados con variables que tomen valores discretos o enteros y valores fraccionarios. A éstos problemas se les conoce como *problemas de programación entera mixta*, (PIM).

El modelo matemático que se utiliza en el presente trabajo es un modelo que pertenece a la *programación lineal entera mixta*. Un problema entero mixto se puede describir de la siguiente manera:

$$\text{máx } cx + hy \quad (3.24)$$

sujeto a:

$$Ax + Gy \leq b, \quad (3.25)$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ entero}, \quad (3.26)$$

$$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z} \quad (3.27)$$

donde A es una matriz $m \times n$; G es una matriz $m \times p$; h es un p vector fila e y es un p vector columna de variables enteras .

3.3.1 OPTIMIZACIÓN MULTI OBJETIVO

Las técnicas de optimización multicriterio tienen como objetivo encontrar aquellas soluciones que representen los mejores compromisos entre todas las medidas de desempeño, las cuales se denominan soluciones eficientes.

COMPLETAR: explicar porque lo nuestro es una simplificación de optimización multicriterio donde modificamos el problema para poder optimizar un solo criterio que es una suma ponderada de los criterios originales y que dejamos a trabajo a futuro lo de múltiples objetivos y que esta estrategia fue necesaria como el número de objetivos por cumplir depende de la elección del usuario y puede ser muy alto (2, 4, 8 16...) por

lo cual el tomador de decisiones no va a entender nada en absoluto de la frente de pareto ni se puede visualizar bien en mas de 3 dimensiones...

3.3.2 OPTIMIZACIÓN EN REDES COMPLEJAS

Un análisis de sensibilidad a una red fue realizado en **PONER AUTORES**[22], donde se muestra una clase más general de redes complejas, en las cuales las redes exponenciales y scale-free son casos especiales al parametrizar dos aspectos en la construcción de ambas redes: el crecimiento y el linkeo preferencial. Así se encontró que esos dos parámetros pueden ser optimizados al producir una red que tiene una interconexión cercana a una red scale-free, una robustez al ataque similar a una red exponencial y una resistencia a errores que mejora en redes exponenciales y scale-free. Es decir, se encontró que en cuanto a conectividad de una red con un alto linkeo preferencial y sin crecimiento (1,0), la robustez es superior a la de todas las demás redes la misma clase. Es decir, las redes exponenciales y scale-free son sub-óptimas debido a el limitado grado de interconexión y a la facilidad de ser atacadas [22].

En [1] **completar que hicieron** pero su robustez a ataques y errores no fue estudiada.

3.4 ALGORITMOS GENÉTICOS

Los algoritmos genéticos son algoritmos de búsqueda que están basados en el comportamiento de la selección natural y la genética [16].

Los pasos típicos que realiza un algoritmo genético pueden resumirse de la siguiente manera:

1. Se genera una población inicial P_i de cierto tamaño k , la cual depende del número de vértices que tenga el grafo.

2. Se eligen los mejores miembros de la P_i para realizar bajo un cierto criterio combinaciones a la población, P_c .
3. A partir de la población combinada, es decir la P_c , y con alguna probabilidad se eligen elementos de P_c y se crea una población mutada P_m según un criterio establecido.
4. Se toma la P_i , la P_c y la P_m y a través de una función objetivo se evalúa cada elemento para elegir las mejores soluciones para formar la población inicial de la siguiente iteración.
5. Después de un número fijo de iteraciones se muestran los n mejores resultados de la última iteración.

Los algoritmos genéticos realizan ésta *evolución* a la población por un número fijo de iteraciones, y por lo general entre más iteraciones se realicen se espera obtener mejores resultados.

Los algoritmos genéticos son diferentes a los métodos tradicionales de optimización y los métodos de búsqueda principalmente por dos motivos:

- 1) Requieren que el conjunto de los parámetros del problema de optimización sean codificados (si es necesario), por ejemplo en una cadena binaria finita.
- 2) Buscan una población de soluciones, no una sola solución.

Algo que también hacen diferentes a los algoritmos genéticos es que típicamente obtienen mejores resultados por realizar mutaciones y combinaciones a una población. En la siguiente figura se muestra cómo un algoritmo genético puede realizar combinaciones a los elementos o cadenas de una población, siendo el punto de intercambio seleccionado al azar.

PONER FIGURA DE LAS FASES DE UN ALGORITMO GENETICO, PARA VER COMO SE GENERAN Y DESCARTAN INDIVIDUOS.

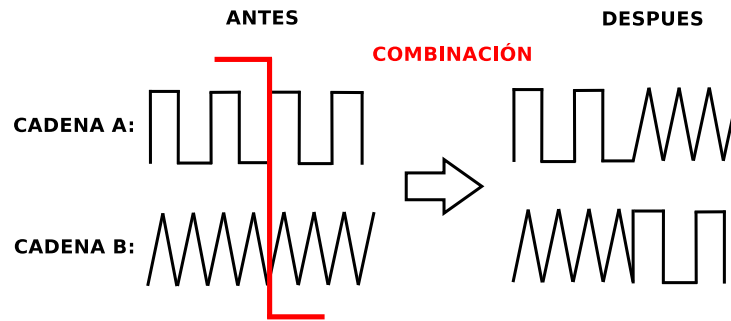


Figura 3.9: Una manera de realizar una combinación es intercambiando información al azar entre dos individuos o *cromosomas* (adaptado de [16]).

Otro punto a favor para utilizar los algoritmos genéticos es que nos dan la ventaja de encontrar un conjunto de varias soluciones al mismo tiempo, teniendo en cuenta que la complejidad computacional puede variar enormemente según el tamaño de la instancia.

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA PROPUESTA

Para resolver el problema de encontrar un conjunto de redes con mayor calidad que la red original, en este trabajo se propone una metodología basada en *optimización multiobjetivo*, *algoritmos genéticos* y *diseño de experimentos*. Se propone la optimización multiobjetivo porque se desea optimizar un conjunto de propiedades en la topología del grafo. Se propone un algoritmo genético como método de solución porque la naturaleza de un genético es realizar mutaciones y cambios a información y esa naturaleza es la que se necesita aplicar a la topología de un grafo para obtener soluciones con una mayor calidad. Además con los algoritmos genéticos se obtiene un conjunto de soluciones, lo cual da la oportunidad al tomador de decisiones de elegir cual es la mejor solución tomando como criterio el costo involucrado para mejorar la calidad de la red.

A su vez se propone un diseño de experimentos porque es una colección de herramientas estadísticas que se relacionan con la planeación, la ejecución y la interpretación de un experimento para obtener conclusiones validas y objetivas [18].

Aplicando estas técnicas en la metodología propuesta se asegura que se podrá resolver cualquier instancia, sin importar que para cada grafo al cual se le analiza su topología se tenga que resolver un problema de optimización multiobjetivo diferente cuya solución estará en dependencia del conjunto de propiedades que el usuario elija mejorar.

4.1 FUNCIONAMIENTO DEL ALGORITMO GENÉTICO

En la figura 4.1 se resume el funcionamiento del algoritmo genético programado, y los procesos involucrados se describen a continuación:

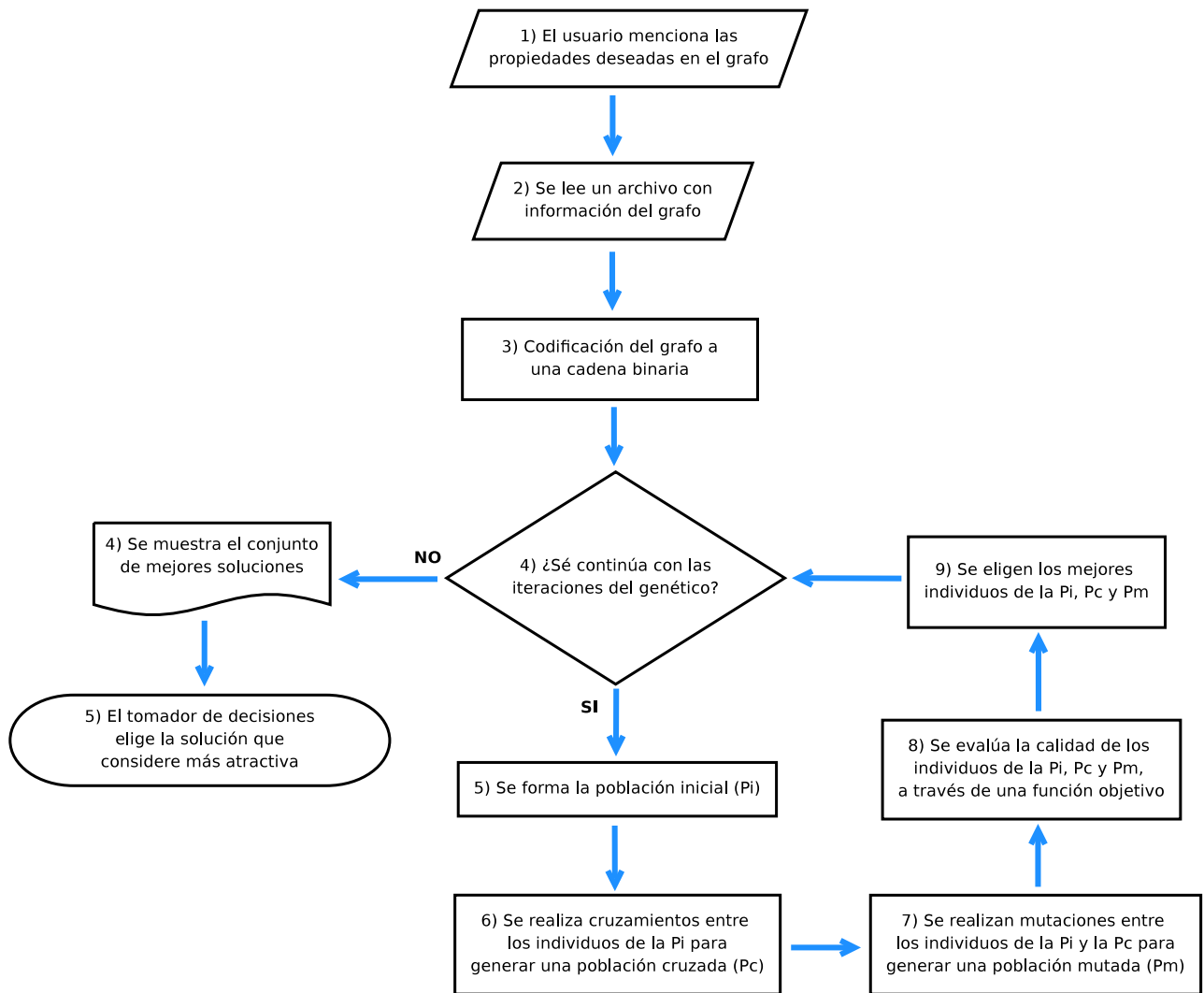


Figura 4.1: Diagrama del funcionamiento del algoritmo genético.

- **Se indican las propiedades a maximizar y minimizar.** Se pide al usuario que dé una ponderación a cada una de las propiedades para identificar cuáles son las más relevantes, y también el usuario indica que propiedades desea maximizar y cuales minimizar, teniendo como consecuencia un problema de

optimización multiobjetivo como se mencionó anteriormente.

Tabla 4.1: Archivo de entrada: declaración de un grafo ponderado de 6 vértices y 8 aristas. Las primeras dos columnas indican las aristas del grafo y la tercera columna indica su ponderación.

```
# Inicio de la declaracion de aristas
n 6 m 8
1 2 3
1 3 5
1 4 1
2 5 9
3 4 7
3 5 7
3 6 1
# Fin de la declaracion de aristas
```

- **Se leen las conexiones del grafo.** Se lee la información del grafo original (ponderado y no dirigido) a través de un archivo de texto en donde se listan cada una de las aristas con su respectivo costo, como se observa en la Figura ???. Así se construye su *matriz de adyacencia*, ya que es una estructura de datos eficaz en el caso de grafos no dirigidos, porque ésta resulta ser un espejo de los datos, es decir, basta con utilizar la mitad de la información para conocer las conexiones entre los vértices.
- **Se codifica el grado a una cadena binaria.** Después de construir la matriz de adyacencia se representan las conexiones del grafo a través de una *cadena binaria*, la cual representará la información del grafo original que será mejor conocido como **cromosoma padre**; tal como se muestra en la figura 4.2. Esta codificación se realiza para poder introducir la información del grafo al algoritmo genético.

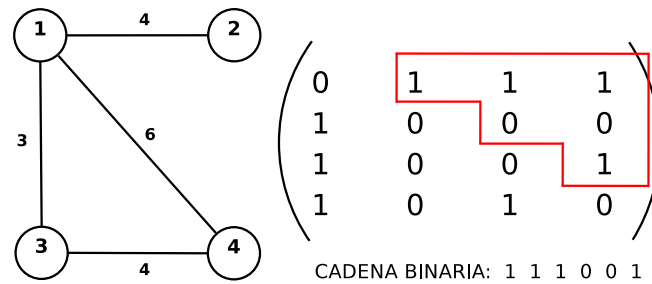


Figura 4.2: Un grafo no dirigido y ponderado con su matriz de adyacencia y la representación de sus conexiones a través de una cadena binaria.

- **Se ejecuta el algoritmo genético.** Durante un número fijo de iteraciones se ejecuta el algoritmo genético, por lo cual al término de cada iteración se verifica si aún quedan iteraciones pendientes. En este punto pueden suceder dos casos: que se continúe con la ejecución del algoritmo genético, o bien que se finalice la ejecución del algoritmo genético.

En caso de continuar iterando el algoritmo genético:

1. Se crea una *población inicial*, (P_i). El algoritmo genético toma como base la información del *cromosoma padre* y crea un duplicado de cromosomas a los cuales se le realizan algunos cambios para crear una población inicial (P_i), la cual sirve como base para comenzar las iteraciones del genético.
2. Se crea una *población cruzada*, (P_c). El algoritmo genético comienza a realizar mutaciones entre los individuos de la P_i ; es decir, toma aleatoriamente la información del cromosoma padre más un conjunto de m pares del conjunto de la P_i , para generar una tercera población a través de un cruzamiento o intercambio de información entre 2 cromosomas, con lo cual se obtienen m individuos nuevos denominados *población cruzada* (P_c).
3. Se crea una *población mutada*, (P_m). El algoritmo genético comienza a realizar mutaciones entre la P_i y la P_c ; es decir, se eligen uniformemente al azar h individuos de la P_i y de la P_c para realizarles mutaciones y crear una nueva población mutada (P_m). Esto se obtiene cambiando los valores

de los cromosomas; es decir, si un valor elegido al azar de la cadena binaria o cromosoma era igual a 1, entonces se logra su mutación cambiando su valor a 0, y lo mismo para el caso contrario, si un valor de la cadena binaria era 0 entonces se cambia su valor a 1.

4. Se evalúa la calidad ó *fitness*, f . A cada cromosoma de las tres poblaciones creadas: P_i , P_c y la P_m se le evalúa su calidad o *fitness* a través de una *función objetivo*, con el propósito de elegir los mejores individuos de cada población para que conformen la P_i de la siguiente iteración del genético.
5. Se conforma la P_i de la siguiente iteración. Se escogen los mejores individuos de la P_i , P_c y la P_m para formar la siguiente P_i porque se pretende que en cada iteración del genético, los individuos siempre sean mejores que los anteriores.

En caso de finalizar la ejecución del algoritmo genético:

1. **Se eligen los mejores individuos.** Se toman los mejores individuos generados durante las n iteraciones del genético y se muestran al tomador de decisiones.
2. **Se elige la solución mas atractiva.** El tomador de decisiones elige la solución que considere más atractiva para mejorar la calidad de la red original.

4.2 FUNCIÓN OBJETIVO

Es de suma importancia tener definida una clara y eficaz función objetivo para asegurar buenos resultados. La función objetivo que se utiliza en este trabajo está definida por el usuario, ya que está compuesta por las ponderaciones que se le dió a cada propiedad y por los niveles obtenidos de cada propiedad (a través del algoritmo genético). Así con los resultados obtenidos se realiza una suma ponderada que evalúa la calidad o *fitness* de cada cromosoma.

La función objetivo utilizada para la primera versión de la herramienta de software tiene la siguiente forma:

$$f = \alpha * f_1 + \beta * f_2 + \gamma * f_3 + \dots + \omega * f_n, \quad (4.1)$$

donde α , β , γ hasta ω representan la importancia de las propiedades elegidas y f_1 , f_2 , f_3 hasta f_n representan los niveles de las propiedades cuantificadas a través de las métricas correspondientes. Cabe recordar que la longitud de la función objetivo será del tamaño de las propiedades a optimizar seleccionadas por el usuario.

Si una propiedad se desea minimizar, el algoritmo genético multiplica dicha propiedad por -1, ya que así tendrá un efecto significativo en la función objetivo. En caso de querer maximizar una propiedad, ésta se deja tal cual, ya que la función objetivo como es una suma ponderada, tomará aquellos cromosomas con los valores más altos, y son esos valores los que reflejan una maximización en la propiedad.

Por tanto los individuos que se eligen como los mejores son aquellos que tienen los valores más altos en su *fitness*, porque son los que aseguran una mejora en su calidad.

4.3 RELACIÓN DE PROPIEDADES Y MÉTRICAS

En el diseño de una red, existen aspectos que son muy importantes, como la confiabilidad de la red y la tolerancia a fallas. En **PONER NOMBRE DE AUTORES** [25] se mencionan algunos principios fundamentales ó propiedades estructurales que deberían tomarse en cuenta en el diseño de las interconexiones de los componentes de una red o un grafo según sea la aplicación. Algunos de estos componentes son:

1. Grado pequeño y fijo.
2. Retardo corto en la transmisión.
3. Máxima falla a tolerancias.

4. Fácil ruteo de algoritmos.

Es por esto que las propiedades estructurales que se han decidido tomar en cuenta principalmente para mejorar la calidad en la topología de un grafo son:

- **Eficiencia en la transmisión de mensajes.** La cual es medida a través de la *distancia promedio* y el *diámetro*, porque proveen eficientes parámetros para medir el tiempo de retardo de transmisión de un mensaje en la red.
- **Robustez.** Es importante medir la robustez de una red porque la rapidez y/o el funcionamiento de un sistema puede ser influenciado o reducida con la presencia de fallas en el grafo. La robustez se puede medir a través de la *conectividad* de las aristas, ya que ha demostrado ser un parámetro importante para medidas determinísticas de la tolerancia a fallas [25].
- **Vulnerabilidad.** La vulnerabilidad de una red se obtiene a través de la eficiencia global de la red. Es por esto que se utilizan las métricas *eficiencia global* y *vulnerabilidad*.

Otras métricas que se utilizan para cuantificar las propiedades son:

1. Coeficiente de agrupamiento
2. Grado mínimo.
3. Grado máximo.
4. Grado promedio.
5. Ruta más corta característica, que resulta ser el promedio de las rutas más cortas.

4.4 CONJUNTO DE SOLUCIONES

Para elegir cuales son las topologías alternativas que tienen el menor costo, se realiza una suma de las ponderaciones dadas a cada arista (definidas en el archivo de texto con el listado de las aristas) para obtener el costo total de realizar modificaciones a la topología del grafo. El conjunto de las topologías que se presentan al usuario corresponden a aquellas que tengan el menor costo y en adición se sugieren al conjunto de soluciones otras topologías de mayor costo que tienen una mejor calidad, el objetivo es esto es que el tomador de decisiones vea si vale la pena realizar una inversión extra para mejorar aún más la calidad de la red.

4.5 NORMALIZACIÓN DE MÉTRICAS

Para la obtención de mejores resultados se decidió normalizar cada una de las métricas utilizadas en la herramienta de software. El objetivo de normalizarlas es para obtener todos valores en el rango $[0,1]$. Para la normalización se encontró los valores máximos y mínimos de cada métrica. Los cuales se describen a continuación.

0) Utilizar para normalizar $[0,1]$:

$$\frac{x - a}{|b - a|} \quad (4.2)$$

1) Encontrar los valores maximos y minimos para cada metrica

- Eficiencia del grafo. El V_{\min} que puede tomar es cero, el cual se obtiene cuando no existe ningún camino de i a j y por tanto la distancia es infinita. Al obtener la eficiencia con una distancia infinita el resultado se aproxima a cero. El V_{\max} que puede tomar es 1, que se obtiene cuando el grafo es completo y por tanto existe una arista entre cualesquiera (i, j) .
- Diámetro. El V_{\min} que puede tomar es cero, el cual se obtiene cuando no

| Métrica | Valor mín | Valor máx |
|--|-----------|-----------|
| Eficiencia del grafo | 0 | 1 |
| Diámetro | 0 | 1 |
| Grado mínimo | 0 | 1 |
| Grado máximo | 0 | 0 |
| Grado promedio | 0 | 0 |
| Longitud de la ruta más corta característica | 0 | 0 |
| Vulnerabilidad del grafo | 0 | 0 |
| Coefficiente de agrupamiento | 0 | 0 |

Tabla 4.2: Valores máximos y mínimos de métricas normalizadas

existe ningún camino de i a j . El $V_{\text{máx}}$ que puede tomar es infinito, el cual se obtiene cuando no existe una ruta más corta entre los vértices (i, j) .

- Grado mínimo. El $V_{\text{mín}}$ que puede tomar es cero, que ocurre cuando i no tiene algún vecino. El $V_{\text{máx}}$ que puede tomar es $(n-1)/2$ aunque se convertiría en el grado máximo o grado promedio de la red.
- Grado máximo. El $V_{\text{mín}}$ que puede tomar es cero, que ocurre cuando i no tiene vecinos. El $V_{\text{máx}}$ que puede tomar es $(n-1)/2$.
- Grado promedio. El $V_{\text{mín}}$ que puede tomar es cero, y el $V_{\text{máx}}$ se puede representar como $\langle k \rangle = 2e/n$.
- Longitud de la ruta más corta característica.
- Vulnerabilidad del grafo. La vulnerabilidad de un grafo está asociado a su Eficiencia, por tanto el $V_{\text{mín}}$ que puede tomar es cero y el $V_{\text{máx}}$ es xxx.
- Coeficiente de agrupamiento.

CAPÍTULO 5

EVALUACIÓN

Un grafo demuestra tener calidad cuando es estable, y un grafo es estable si muestra una tendencia a regresar a los valores de los parámetros originales después de una perturbación, como por ejemplo la eliminación de vértices y/o aristas, **poner nombre de autores**[10]. Para demostrar si un grafo tiene calidad en este trabajo se propone que el algoritmo genético tenga como objetivo el añadir y/o eliminar aristas aleatoriamente en la estructura topológica del grafo, en donde cada movimiento tiene un costo inicial igual a uno. Posteriormente se maneja que el eliminar y/o agregar una arista tienen diferentes costos.

Para demostrar si la metodología que se propone y los resultados arrojados son correctos, se realiza un diseño de experimentos cuya metodología se explica a continuación.

5.1 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Un experimento puede definirse como una prueba o serie de pruebas en las que se hacen cambios deliberados en las variables de entrada (factores) de un proceso o sistema para observar e identificar las razones de los cambios que pudieran influir en la respuesta de salida (Montgomery, 2005). El diseño de experimentos es uno de los medios más utilizados para conocer el funcionamiento de procesos y sistemas. Cuando se desarrolla un experimento se deben identificar las variables que son controlables y las que no, además de utilizar métodos estadísticos.

escribir cuales son mis variables controlables

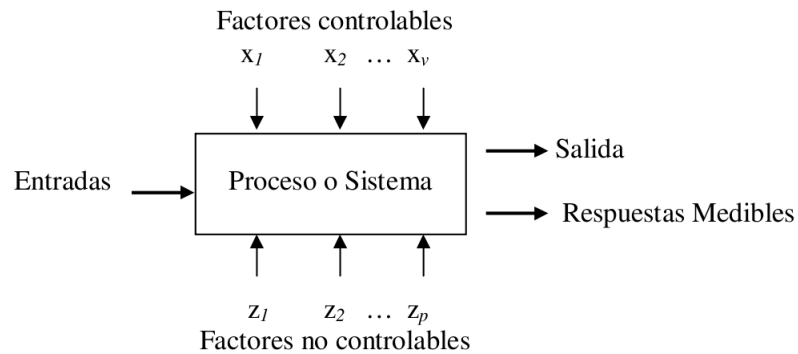


Figura 5.1: Modelo general de un proceso o sistema.

El experimento que se desarrolla en el presente trabajo, tiene varios objetivos, los cuales se describen a continuación:

1. Comprobar el funcionamiento correcto del algoritmo genético en los principales modelos redes complejas.
2. Encontrar qué parámetros se deben modificar para mejorar el fitness de los individuos durante cada iteración.
3. Encontrar los parámetros iniciales de la herramienta de software. Se pretende establecer los valores de los parámetros iniciales con los cuales la herramienta de software asegura una mejora en la calidad de la red según su aplicación.

5.2 EXPERIMENTOS COMPUTACIONALES

En esta sección se describen los experimentos realizados para lograr los objetivos mencionados anteriormente.

5.2.1 FUNCIONAMIENTO DEL ALGORITMO GENÉTICO

Para comprobar el funcionamiento del algoritmo genético se decidió realizar pruebas en tres modelos de redes complejas: Small-World, Scale-Free y Aleatoria. Cada una de éstas redes tiene propiedades estructurales conocidas, así que los experimentos consisten en invertir las propiedades estructurales que las caracterizan a través del algoritmo genético programado. En caso de tener éxito y lograr invertir las propiedades, se considera el correcto funcionamiento del genético.

Las contrucciones de las redes complejas mencionadas se obtuvieron gracias a los *generadores de modelos* proporcionados por Virtanen [23] que fueron utilizados durante su investigación de tesis de maestría. Los modelos y sus parámetros utilizados se describen a continuación.

Modelo Small-World de Wattz y Strogatz

Las redes *Small-World* se caracterizan por tener un alto coeficiente de agrupamiento y una *longitud de ruta* pequeña entre sus vértices. Para comprobar el funcionamiento del genético se construyó una red *Small-World* de 30 vértices, 74 aristas, un $k=2$ y una $p=0.30$ como se muestra en la Figura XX: **Aquí va la imagen de la red**

Al medir las propiedades estructurales de esta red se obtuvo:

| $C(G)$ | $L(G)$ | $fitness$ |
|----------|------------|-----------|
| 1.098294 | 107.365517 | 10.626722 |

Tabla 5.1: Propiedades cuantificadas de una red Small-World de 30 vértices y 74 aristas.

Al invertir las principales propiedades se obtuvieron los siguientes resultados durante una sola iteración del genético, con un tamaño de población igual a 10:

Necesito conocer los valores de cada metrica de cada cromosoma que se toma como de los mejores de cada iteracion, ya que solo guardaba los

| $C(G)$ | $L(G)$ | $fitness$ |
|----------|------------|-----------|
| 1.098294 | 107.365517 | 10.626722 |

Tabla 5.2: Propiedades cuantificadas de una red Small-World de 30 vértices y 74 aristas.

mejores fitness. Los necesito para graficar que si funciona mi genetico

Modelo Scale-Free de Albert y Barabási

Las redes *Scale-Free* se caracterizan por ser robuztas ante fallas aleatorias y muy vulnerable cuando se atacan los vértices de mayor grado. La red *Scale-Free* que se construyó fue de **bla bla bla** como se muestra en la Figura XX: **Aqui va la imagen de la red**

Al medir las propiedades estructurales se obtuvo:

Modelo Aleatoria $G_{n,p}$

Las redes *Aleatorias* se caracterizan por tener aproximadamente el mismo grado. Así se construyó una red *Aleatoria* de 30 vértices, 142 aristas y una probabilidad igual 0.3 como se muestra en la FiguraXX: **Aqui va la imagen de la red**

Al medir las propiedades estructurales se la red se obtuvo:

Modelo Aleatoria $G_{n,m}$

Se construyó la red *Aleatoria* de 30 vértices y 72 aristas.

Aqui va la imagen de la red

Al medir sus propiedades estructurales se obtuvo:

5.3 APLICACIONES

5.3.1 CASO PRACTICO I

5.3.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

5.3.3 MODELO Y SOLUCIÓN PROPUESTA

5.3.4 RESULTADOS

5.3.5 CONCLUSIONES

5.4 CASO PRACTICO II

5.4.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

5.4.2 MODELO Y SOLUCIÓN PROPUESTA

5.4.3 RESULTADOS

5.4.4 CONCLUSIONES

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

6.1 TRABAJO FUTURO

Algo más de trabajo futuro es modificar el algoritmo genético para poder añadir y/o eliminar vértices a la red, ya que solo nos hemos enfocado a realizar cambios a la topología en base a las aristas.

Existen muchas otras maneras de definir la función objetivo para evaluar la calidad de un grafo según su aplicación, así que sería bueno que se generaran otras funciones objetivos para comprobar si la actual función objetivo es la adecuada o si se debería modificar.

Por último una manera de definir si un grafo tiene calidad es si el grafo es estable, y un grafo es estable si muestra una tendencia a regresar a los valores de los parámetros originales después de una perturbación [8] (como por ejemplo la eliminación de aristas). Así que otro objetivo para el trabajo futuro es hacer que la herramienta de software también mida la estabilidad de una red antes y después de realizar cambios en su estructura topológica, para así tener otro factor que determine la calidad de la red según sea su aplicación.

LISTA DE SÍMBOLOS

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| 3.1. Tipos de grafos completos. | 10 |
| 3.2. Red neuronal del gusano <i>Caenorhabditis elegans</i> modelado como una red compleja [23]. | |
| 3.3. Grafos Isomorfos. | 13 |
| 3.4. Ilustración de la definición del coeficiente de agrupamiento. | 18 |
| 3.5. Estructura topológica y gráfica de la distribución del grado de una red Aleatoria [18]. | 22 |
| 3.6. Estructura topológica y gráfica de la distribución del grado de una red Exponencial [18]. | |
| 3.7. Con realizar cambios aleatorios en la conexión de las aristas, se obtiene una red con un n | |
| 3.8. Estructura topológica y gráfica de la distribución del grado de una red Scale Free [18]. | 22 |
| 3.9. Una manera de realizar una combinación es intercambiando información al azar entre do | |
| 4.1. Diagrama del funcionamiento del algoritmo genético. | 33 |
| 4.2. Un grafo no dirigido y ponderado con su matriz de adyacencia y la representación de sus | |
| 5.1. Modelo general de un proceso o sistema. | 42 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|--|----|
| 3.1. Ejemplos de redes complejas | 12 |
| 4.1. Archivo de entrada: declaración de un grafo ponderado de 6 vértices y 8 aristas. Las prin | |
| 4.2. Valores máximos y mínimos de métricas normalizadas | 40 |
| 5.1. Propiedades cuantificadas de una red Small-World de 30 vértices y 74 aristas. | 43 |
| 5.2. Propiedades cuantificadas de una red Small-World de 30 vértices y 74 aristas. | 44 |

APÉNDICE A

ESTE ES UN APÉNDICE

A.1 CITAS BIBLIOGRÁFICAS

Esta es otra página para que se vea el encabezado.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALBERT, R. y A.-L. BARABÁSI, «Topology of Evolving Networks: Local Events and Universality», *Physical Review Letters*, **85**(24), págs. 5234–5237, diciembre 2000.
- [2] ALBERT, R. y A.-L. BARABÁSI, «Statistical mechanics of complex networks», *Review of Modern Physics*, **74**(1), págs. 47–97, 2002.
- [3] ALBERT, R., H. JEONG y A.-L. BARABÁSI, «Error and attack tolerance of complex networks», *Nature*, **406**, págs. 378–382, julio 2000.
- [4] BARABÁSI, A.-L. y R. ALBERT, «Emergence of scaling in random networks», *Science*, **286**, págs. 509–512, octubre 1999.
- [5] BARABÁSI, A.-L. y R. ALBERT, «Emergence of scaling in random networks», *Science*, **286**, págs. 509–512, octubre 1999.
- [6] BORNHOLDT, S. y H. G. SCHUSTER (editores), *Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 2003.
- [7] BRODER, A. Z., S. R. KUMAR, F. MAGHOUL, P. RAGHAVAN, S. RAJAGOPALAN, R. STATA, A. TOMKINS y J. WIENER, «Graph structure in the Web», *Computer Networks*, **33**(1–6), págs. 309–320, junio 2000.
- [8] CALLAWAY, D. S., M. E. J. NEWMAN y S. H. S. D. J. WATTS, «Network Robustness and Fragility: Percolation on Random Graphs», *Physical Review Letters*, **85**(25), págs. 5468–5471, diciembre 2000.

-
- [9] COHEN, R., K. EREZ, D. BEN AVRAHAM y S. HAVLIN, «Resilience of the Internet to Random Breakdowns», *Physical Review Letters*, **85**(21), págs. 4626–4628, noviembre 2000.
- [10] CSERMELY, P., *Weak Links: Stabilizers of Complex Systems from Proteins to Social Networks (The Frontiers Collection)*, Springer, April 2006.
- [11] DA F. COSTA, L., F. A. RODRIGUES, G. TRAVIESO y P. R. VILLAS BOAS, «Characterization of complex networks: A survey of measurements», *Advances in Physics*, **56**(1), págs. 167–242, enero 2007.
- [12] DEKKER, A. H. y B. D. COLBERT, «Network robustness and graph topology», en *Proceedings of the 27th Australasian conference on Computer science*, tomo 26, Australian Computer Society, Inc., Darlinghurst, Australia, págs. 359–368, 2004.
- [13] DOROGOVTSEV, S. N. y J. F. F. MENDES, *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and World Wide Web*, Oxford University Press, Oxford, UK, enero 2003.
- [14] ERDŐS, P. y A. RÉNYI, «On the evolution of random graphs», en *Selected Papers of Alfréd Rényi*, tomo 2, Akadémiai Kiadó, Budapest, Hungary, págs. 482–525, first publication in MTA Mat. Kut. Int. Közl. 1960, 1976.
- [15] GILBERT, E. N., «Random graphs», *Annals of Mathematical Statistics*, **30**(4), págs. 1141–1144, diciembre 1959.
- [16] GOLDBERG, D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley Professional, January 1989.
- [17] LATORA, V. y M. MARCHIORI, «Efficient behavior of small-world networks», *Physical Review Letters*, **87**(19), pág. 198 701, noviembre 2001.
- [18] LÓPEZ, T. T., *Clasificación de Redes Complejas usando Funciones de Caracterización que Permitan Discriminar entre Redes Aleatorias, Power-Law y Exponenciales*, Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, 2007.

-
- [19] NEWMAN, M. E. J., «The structure and function of complex networks», *SIAM Review*, **45**(2), págs. 167–256, 2003.
- [20] S., L. L., *Optimization Theory for Large Systems*, Dover Publications Inc., 2002.
- [21] SCHAEFFER, S. E., *Algorithms for nonuniform networks*, Tesis Doctoral, Helsinki University of Technology, Department of Computer Science and Engineering, abril 2006.
- [22] SHARGEL, B., H. SAYAMA, I. R. EPSTEIN y Y. BAR-YAM, «Optimization of Robustness and Connectivity in Complex Networks», *Physical Review Letters*, **90**(6), pág. 068 701, febrero 2003.
- [23] VIRTANEN, S. E., *Properties of nonuniform random graph models*, Licentiate thesis, Helsinki University of Technology, Department of Computer Science and Engineering, marzo 2003.
- [24] WATTS, D. J. y S. H. STROGATZ, «Collective Dynamics of 'Small World' Networks», *Nature*, **393**(6684), págs. 440–442, junio 1998.
- [25] XU, J., *Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks*, Kluwer Academic Publishers, 2001.

FICHA AUTOBIOGRÁFICA

Perla Elizabeth Cantú Cerda

Candidato para el grado de Maestro en Ciencias
en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

ANÁLISIS Y OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL DE
REDES COMPLEJAS

Nacida el 11 de diciembre de 1983 en Monterrey, Nuevo León. Hija del Sr. José Antonio Cantú Aguilar y la Sra. Victoria Cerda Ramírez. Egresada de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL como Ingeniero Administrador de Sistemas (2000-2005). Inició sus estudios de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas en Enero del 2007 con el apoyo del Programa en Ingeniería de Sistemas y una beca de manutención otorgada por el CONACYT.